

**Universidad de Guanajuato**  
**F.I.M.E.E.**  
**Laboratorio de Cálculo I**  
Prof. Ing. Daniel Arturo Razo Montes  
Práctica 2: Cómputo de límites simbólicos

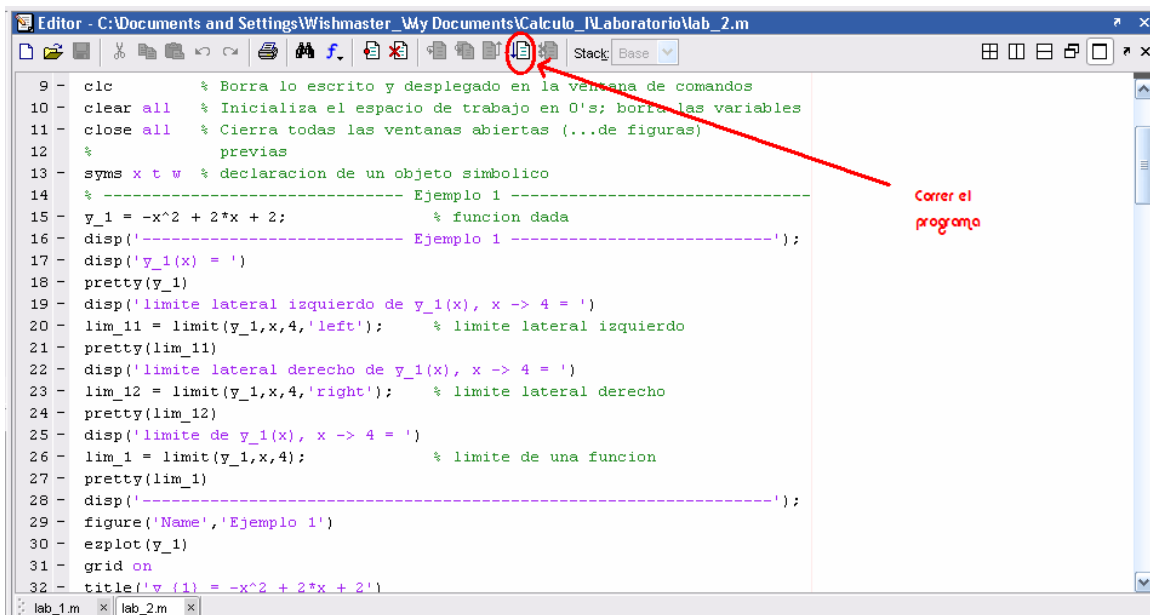
---

## I. Introducción

En esta práctica se verá como calcular límites de una función usando el *toolbox* de matemática simbólica de MatLab.

## II. Desarrollo

Teclee los siguientes listados en su editor de archivos .m, figura 1. Las salidas para cada uno de los listados las verá en la ventana de comandos (*Command Window*).



```
9 - clc           % Borra lo escrito y desplegado en la ventana de comandos
10 - clear all    % Inicializa el espacio de trabajo en 0's; borra las variables
11 - close all   % Cierra todas las ventanas abiertas (...de figuras)
12 -           % previas
13 - syms x t w % declaracion de un objeto simbolico
14 - % ----- Ejemplo 1 -----
15 - y_1 = -x^2 + 2*x + 2;           % funcion dada
16 - disp('----- Ejemplo 1 -----');
17 - disp('y_1(x) = ')
18 - pretty(y_1)
19 - disp('limite lateral izquierdo de y_1(x), x -> 4 = ')
20 - lim_11 = limit(y_1,x,4,'left'); % limite lateral izquierdo
21 - pretty(lim_11)
22 - disp('limite lateral derecho de y_1(x), x -> 4 = ')
23 - lim_12 = limit(y_1,x,4,'right'); % limite lateral derecho
24 - pretty(lim_12)
25 - disp('limite de y_1(x), x -> 4 = ')
26 - lim_1 = limit(y_1,x,4);         % limite de una funcion
27 - pretty(lim_1)
28 - disp('----- Ejemplo 1 -----');
29 - figure('Name','Ejemplo 1')
30 - ezplot(y_1)
31 - grid on
32 - title('y (1) = -x^2 + 2*x + 2')
```

Figura 1. Ventana del editor de archivos .m de MatLab

### Listado 1. Ejemplo 1

```
clc           % Borra lo escrito y desplegado en la ventana de comandos
clear all    % Inicializa el espacio de trabajo en 0's; borra las variables
close all   % Cierra todas las ventanas abiertas (...de figuras)
%           % previas
syms x t w % declaracion de un objeto simbolico
% ----- Ejemplo 1 -----
y_1 = -x^2 + 2*x + 2;           % funcion dada
disp('----- Ejemplo 1 -----');
disp('y_1(x) = ')
pretty(y_1)
disp('limite lateral izquierdo de y_1(x), x -> 4 = ')
lim_11 = limit(y_1,x,4,'left'); % limite lateral izquierdo
pretty(lim_11)
disp('limite lateral derecho de y_1(x), x -> 4 = ')
```

```

lim_12 = limit(y_1,x,4,'right'); % limite lateral derecho
pretty(lim_12)
disp('limite de y_1(x), x -> 4 = ')
lim_1 = limit(y_1,x,4); % limite de una funcion
pretty(lim_1)
disp('-----');
figure('Name','Ejemplo 1')
ezplot(y_1)
grid on
title('y_{1} = -x^2 + 2*x + 2')
% -----

```

Salida del listado 1:

```

----- Ejemplo 1 -----
y_1(x) =

          2
        -x  + 2 x + 2
limite lateral izquierdo de y_1(x), x -> 4 =

          -6
limite lateral derecho de y_1(x), x -> 4 =

          -6
limite de y_1(x), x -> 4 =

          -6
-----

```

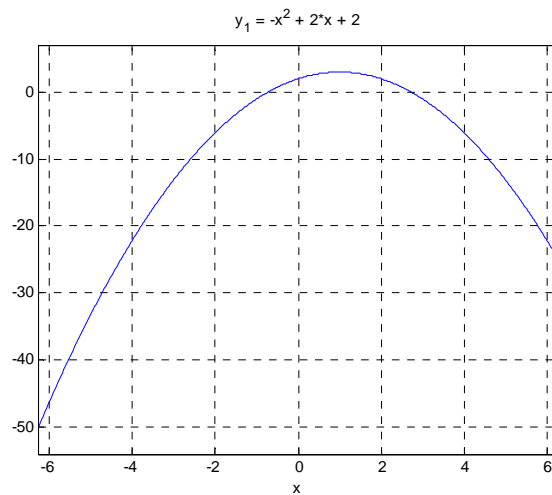


Figura 2. Gráfica de salida para el ejemplo 1

Listado 2. Ejemplo 2

```

% ----- Ejemplo 2 -----
y_21 = x^2; % funcion compuesta
y_22 = -x + 6; % y_2 = y_21 & y_22
disp('----- Ejemplo 2 -----');
disp(' /');
disp(' | x^2 , x < 2');
disp('y_2(x) = <');
disp(' | -x + 6 , x > 2');
disp(' \');

```

```

disp('limite lateral izquierdo de y_2(x), x -> 2 = ')
lim_21 = limit(y_21,x,2,'left');           % limite lateral izquierdo
pretty(lim_21)
disp('limite lateral derecho de y_2(x), x -> 2 = ')
lim_22 = limit(y_21,x,2,'right');         % limite lateral derecho
pretty(lim_22)
figure('Name','Ejemplo 2')
disp('-----');
ezplot(y_21,[-2 1.9999])
hold on
ezplot(y_22,[2.001 6])
hold off
grid on
title('Funcion compuesta')
axis([-2 6 -2 10])
% -----

```

Salida del listado 2:

```

----- Ejemplo 2 -----
      /
      | x^2   , x < 2
y_2(x) = <
      | -x + 6 , x > 2
      \
limite lateral izquierdo de y_2(x), x -> 2 =

                                     4
limite lateral derecho de y_2(x), x -> 2 =

                                     4
-----

```

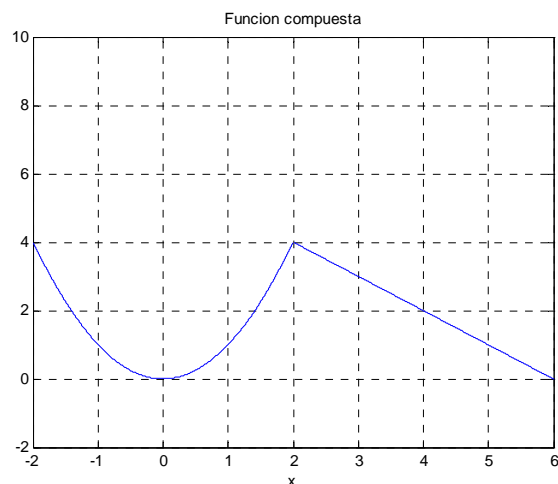


Figura 3. Gráfica de salida para el ejemplo 2

Listado 3. Ejemplo 3

```

% ----- Ejemplo 3 -----
y_3 = (x^2-1)/(x-1);
disp('----- Ejemplo 3 -----');
disp('y_3(x) = ')
pretty(y_3)
disp('limite lateral izquierdo de y_3(x), x -> 1 = ')
lim_31 = limit(y_3,x,1,'left');           % limite lateral izquierdo
pretty(lim_31)

```

```

disp('limite lateral derecho de y_3(x), x -> 1 = ')
lim_32 = limit(y_3,x,1,'right'); % limite lateral derecho
pretty(lim_32)
disp('limite de y_3(x), x -> 1 = ')
lim_3 = limit(y_3,x,1); % limite de una funcion
pretty(lim_3)
disp('-----');
figure('Name','Ejemplo 3')
ezplot(y_3)
grid on
title('y_{3} = (x^2-1)/(x-1)')
% -----

```

### Salida del listado 3:

```

----- Ejemplo 3 -----
y_3(x) =

          2
         x  - 1
        -----
         x  - 1

limite lateral izquierdo de y_3(x), x -> 1 =

          2

limite lateral derecho de y_3(x), x -> 1 =

          2

limite de y_3(x), x -> 1 =

          2

```

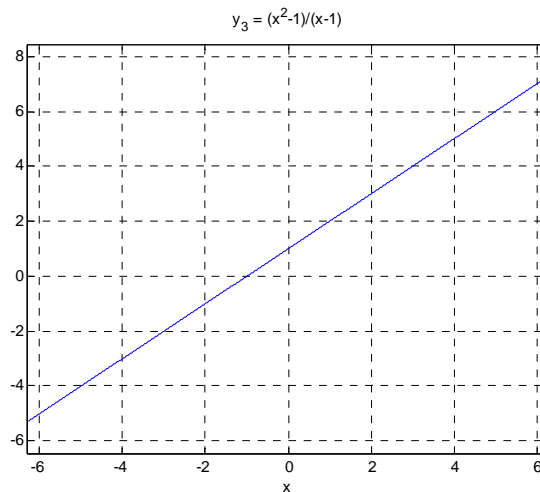


Figura 4. Gráfica de salida para el ejemplo 3

### Listado 4. Ejemplo 4

```

% ----- Ejemplo 4 -----
y_4 = 1/(x-1);
disp('----- Ejemplo 4 -----');
disp('y_4(x) = ')
pretty(y_4)
disp('limite lateral izquierdo de y_4(x), x -> 1 = ')
lim_41 = limit(y_4,x,1,'left'); % limite lateral izquierdo
pretty(lim_41)

```

```

disp('limite lateral derecho de y_4(x), x -> 1 = ')
lim_42 = limit(y_4,x,1,'right'); % limite lateral derecho
pretty(lim_42)
disp('limite de y_3(x), x -> 1 = ')
lim_4 = limit(y_4,x,1); % limite de una funcion
pretty(lim_4)
disp('-----');
figure('Name','Ejemplo 4')
ezplot(y_4)
grid on
title('y_{4} = 1/(x-1)')
% -----

```

Salida del listado 4:

```

----- Ejemplo 4 -----
y_4(x) =

          1
        ----
         x - 1

limite lateral izquierdo de y_4(x), x -> 1 =

        -Inf

limite lateral derecho de y_4(x), x -> 1 =

        Inf

limite de y_3(x), x -> 1 =

        NaN
-----

```

NaN significa *Not a Number*, es decir, no es un número o en otras palabras el límite no existe.

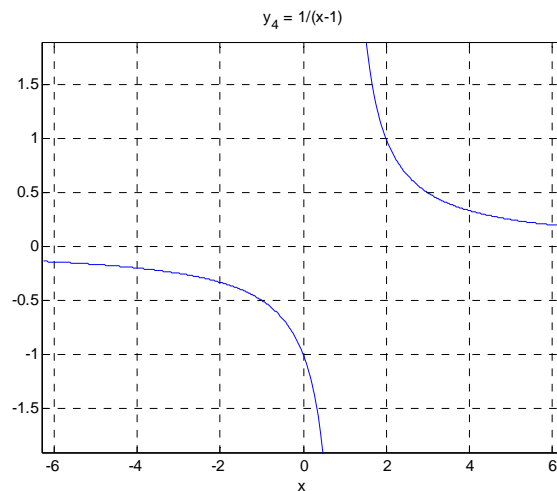


Figura 5. Gráfica de salida para el ejemplo 4

Listado 5. Ejemplo 5

```

% ----- Ejemplo 5 -----
y_5 = (-6*x^4+x^2+1)/(2*x^4-x); % funcion dada
disp('----- Ejemplo 5 -----');
disp('y_5(x) = ')
pretty(y_5)
disp('limite de y_5(x), x -> +inf = ')

```

```

lim_5 = limit(y_5,x,inf);           % limite de una funcion
pretty(lim_5)
disp('----- Ejemplo 5 -----');
figure('Name','Ejemplo 5')
ezplot(y_5)
grid on
title('y_{5} = (-6*x^4+x^2+1)/(2*x^4-x)')
axis([-6 4 -10 10])
% -----

```

Salida del listado 5:

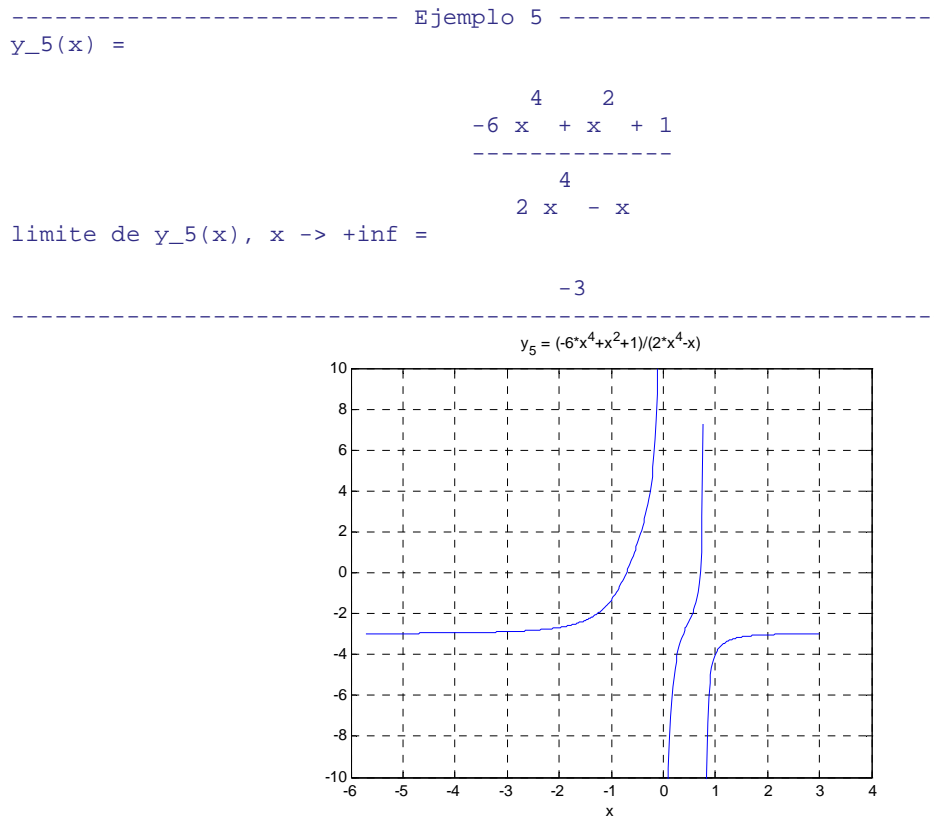


Figura 6. Gráfica de salida para el ejemplo 5

Listado 6. Ejemplo 6

```

% ----- Ejemplo 6 -----
y_6 = 1/(x^2+2*x+1);           % funcion dada
disp('----- Ejemplo 6 -----');
disp('y_6(x) = ')
pretty(y_6)
r_1 = roots([1 2 1]);
s = sprintf('raices del denominador de y_6(x): r1 = %d, r2 = %d',...
            r_1(1),r_1(2))      % desplegar cadena con formato
s = sprintf('limite lateral izquierdo de y_6(x), x -> %d',r_1(1))
lim_61 = limit(y_6,x,r_1(1),'left'); % limite lateral izquierdo
pretty(lim_61)
s = sprintf('limite lateral derecho de y_6(x), x -> %d',r_1(1))
lim_62 = limit(y_6,x,r_1(1),'right'); % limite lateral derecho
pretty(lim_62)
s = sprintf('limite de y_6(x), x -> %d',r_1(1))
lim_6 = limit(y_6,x,r_1(1));    % limite de una funcion

```

```

pretty(lim_6)
disp('-----');
figure('Name','Ejemplo 6')
ezplot(y_6)
grid on
title('y_{6} = {1}/{x^2+2*x+1}')
% -----

```

---

Salida del listado 6:

```

----- Ejemplo 6 -----
y_6(x) =

```

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 1}$$

s =

raices del denominador de y\_6(x): r1 = -1, r2 = -1

s =

limite lateral izquierdo de y\_6(x), x -> -1

Inf

s =

limite lateral derecho de y\_6(x), x -> -1

Inf

s =

limite de y\_6(x), x -> -1

Inf

```

-----

```

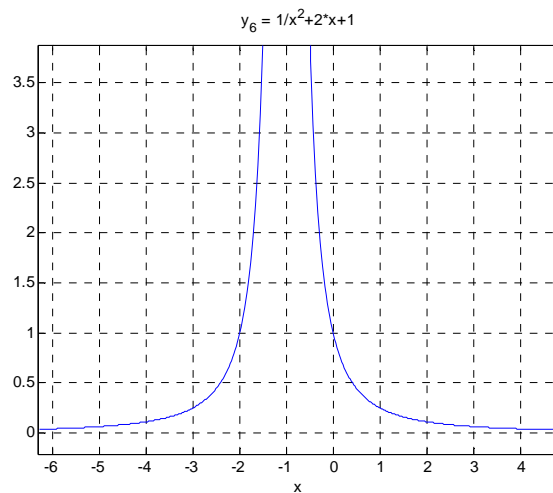


Figura 7. Gráfica de salida para el ejemplo 6

### III. Ejercicios

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} (4x + 3)$

2)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x^2 - 9}{x - 3} \right)$

3)  $g(s) = \begin{cases} s+3 & \text{si } s \leq -2 \\ 3-s & \text{si } -2 < s \end{cases} ; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} g(s) ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(s)$

4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{1-x}$

5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2}$

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3}{x^3 + x^2}$

7)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lceil x^2 \rceil - 1}{x^2 - 1}$

8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

9)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-5|}{x-5}$

10)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{6}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}} \right)$

#### Ayuda.

Para sacar la raíz cuadrada de una función se usa el comando `sqrt()` [*square root*], o puede elevar la función `()^(1/2)`, lo cual se aplica para cualquier raíz n-ésima `()^(1/n)`. Puede ver los argumentos que necesita la función límite, y en general los del comando de cualquier función, tecleando en la ventana de comandos `help limit`, `help abs`, `help ezplot`, `help plot`, `help sprintf`, etc.

No olvide declarar su objeto simbólico (conjunto de variables simbólicas) de las variables independientes al inicio de cada programa, `syms x t w`; si no lo hace, puede declararlas de una a la vez, `x = sym('x');`; `t = sym('t');`; `w = sym('w');`

### IV. Escriba sus conclusiones y observaciones

Nota: Reporte únicamente los ejercicios (sección III), poniendo el código fuente y los resultados de salida para cada uno (graficas y/o expresiones algebraicas). Escriba sus conclusiones generales sobre la práctica.